Διαγώνισμα προσομοίωσης χειμερινής περιόδου
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
2023-2024
Συμμετέχουν τα σχολεία:
2ο Περιστερίου - 14ο Περιστερίου - 2ο Πετρούπολης

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

μονάδες 4

Α2. Έστω συνάρτηση f, είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

μονάδες 7

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = 0$.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, α ν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

γ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$.

δ) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in A$.

ε) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ και $g(x) = e^x$.

Β1. Να βρείτε τη σύνθεση της g με την f.

μονάδες 6

$$\text{Αν } h(x) = (f\circ g)(x) = \frac{e^x}{e^x - 1},\ x \neq 0:$$

Β2. Να δείξετε ότι: $h(-1) < h(1)$, $h(2) < h(1)$ και μετά να δείξετε ότι η συνάρτηση h δεν είναι γνησίως μονότονη.

μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης h.

μονάδες 7

Β4. Αν $h^{-1}(x)=\ln\frac{x}{x-1}$, $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ημ(h^{-1}(x))+2023}{(x-1)^{2006}}$.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$, $\lambda\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Γ1. Να βρείτε τη τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

μονάδες 6

Αν $\lambda=2$.

Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια (αν υπάρχουν): **α.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και **β.** $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$

μονάδες 6

Έστω η συνάρτηση $g(x)=(x+1)f(x)-2$.

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{g(x)}-x\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ(3g(x))}{x^2-x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2ημ\frac{1}{g(x)}}{g(x)+2}$

μονάδες 3+2+3

Γ4. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\mu g(x)\right)$ είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε το $\mu\in\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^{-x}+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

μονάδες 4

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

μονάδες 4

Δ3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $f(e^{2x}+2)+f(e^{2x})>f(-e^x+4)+f(-e^x+2)$.

μονάδες 7

Δ4. Αν $g(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$ να βρείτε τη συνάρτηση fog.

μονάδες 4

Δ5. Αν $(fog)(x)=\frac{1}{x^3+x^2}$, $x>0$ να αποδείξετε ότι η C_{fog} τέμνει την ευθεία y=1 σε μοναδικό σημείο με τετμημένη στο $(0,+\infty)$.

μονάδες 6

Ευχόμαστε επιτυχία!

ΛΥΣΕΙΣ

Α1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Α2. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha) g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και

$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\dfrac{1}{x^4}$. Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ όμως

$$\lim_{x \to 0} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = -\infty$$

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $Ag = \mathbb{R}$ οπότε:

$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x \ne 1\} = \mathbb{R} - \{0\}$ και $h(x) = (f \circ g)(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

Β2. $h(-1) = \dfrac{e^{-1}}{e^{-1} - 1} = \dfrac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e} - 1} = \dfrac{\frac{1}{e}}{\frac{1-e}{e}} = \dfrac{1}{1-e} < 0$ και $h(1) = \dfrac{e}{e-1} > 0$ άρα $h(-1) < h(1)$.

Ακόμη h(2)= $\dfrac{e^2}{e^2 - 1}$ όμως h(1)>h(2) $\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{e}}{e-1} > \dfrac{e^{\cancel{2}}}{e^2 - 1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cancel{e-1}} > \dfrac{e}{\cancel{(e-1)}\,(e+1)} \Leftrightarrow 1 > \dfrac{e}{e+1}$ ισχύει.

Αν η h ήταν γνησίως αύξουσα τότε $1 < 2 \Leftrightarrow h(1) < h(2)$ άτοπο.

Αν η h ήταν γνησίως φθίνουσα τότε $-1 < 1 \Leftrightarrow h(-1) > h(1)$ άτοπο.

Οπότε η h δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα άρα δεν είναι μονότονη.

Β3. Για κάθε $x_1, x_2 \ne 0$ με $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_1} - 1} = \dfrac{e^{x_2}}{e^{x_2} - 1} \Leftrightarrow e^{x_1}(e^{x_2} - 1) = e^{x_2}(e^{x_1} - 1) \Leftrightarrow$

$\cancel{e^{x_1} e^{x_2}} - e^{x_1} = \cancel{e^{x_2} e^{x_1}} - e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} = -e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η συνάρτηση h είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \ne 0$ είναι $h(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x = ye^x - y \Leftrightarrow y = ye^x - e^x \Leftrightarrow y = e^x(y-1)$ (1)

Για y=1 προκύπτει 1= 0 άτοπο οπότε $y \neq 1$ και $(1) \Leftrightarrow \frac{y}{y-1} = e^x$ (2). Άρα $\frac{y}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y(y-1) > 0 \Leftrightarrow$

$y \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ οπότε $(2) \Leftrightarrow x = \ln\frac{y}{y-1}$ με $x \neq 0 \Leftrightarrow \ln\frac{y}{y-1} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{y}{y-1} \neq 1$ ισχύει.

Άρα $h(A) = A_{h^{-1}} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ και $h^{-1}(x) = \ln\frac{x}{x-1}$.

B4. Για $x \in (1, +\infty)$ ισχύει ότι: $-1 \leq \eta\mu(h^{-1}(x)) \leq 1 \Leftrightarrow$

$-1 \leq \eta\mu(h^{-1}(x)) \leq 1 \Leftrightarrow 2022 \leq \eta\mu(h^{-1}(x)) + 2023 \leq 2024$. Όμως κοντά στο 1 το $(x-1)^{2006} > 0$ οπότε

$\frac{2022}{(x-1)^{2006}} \leq \frac{\eta\mu(h^{-1}(x)) + 2023}{(x-1)^{2006}} \leq \frac{2024}{(x-1)^{2006}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2022}{(x-1)^{2006}} = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{2006} = 0$ και $(x-1)^{2006} > 0$ για x > 1,

οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(h^{-1}(x)) + 2023}{(x-1)^{2006}} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu(h^{-1}(x)) + 2023}{(x-1)^{2006}} = +\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. Για $x \neq \pm 1$ είναι $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x)(x^2-1) = (\lambda-1)x^2 + x - 2$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(x^2-1)\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[(\lambda-1)x^2 + x - 2\right] \Leftrightarrow 0 = \lambda - 1 + 1 - 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$. Τότε

$f(x) = \frac{(2-1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$.

Γ 2. α. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$.

β. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\frac{x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\left[(x+2)\frac{1}{x+1}\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-1}(x+2) = 1 > 0$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1} = -\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1) = 0$ και $x+1 < 0$ για x < -1, οπότε

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1} = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1) = 0$ και $x+1 > 0$ για x > -1, οπότε $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

Γ3. $g(x) = (x+1)f(x) - 2 = \cancel{(x+1)}\frac{x+2}{\cancel{x+1}} - 2 = x$

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{g(x)} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)^2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)\right] = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3g(x))}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\eta\mu(3x)}{3x}\cdot\frac{1}{x-1}\right) = 3\cdot 1\cdot(-1) = -3$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)}{3x} \underset{\substack{x\to 0 \Rightarrow \\ u\to 0}}{\overset{3x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}}{g(x)+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x+2}\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to0^-}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{\dfrac{1}{u^2}\eta\mu u}{\dfrac{1}{u}+2}=\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{\dfrac{\eta\mu u}{u^{\cancel{2}}}}{\dfrac{1+2u}{\cancel{u}}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

Γ4. Έστω $h(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\mu\cdot g(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\mu\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\mu\right).$

Αν $1-\mu>0\Leftrightarrow\mu<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty\cdot(1-\mu)=+\infty$ απορρίπτεται.

Αν $1-\mu<0\Leftrightarrow\mu>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty\cdot(1-\mu)=-\infty$ απορρίπτεται.

Αν μ=1 τότε : $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-x+1-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow-x_1>-x_2\overset{e^t\nearrow}{\Rightarrow}e^{-x_1}>e^{-x_2}\Rightarrow$

$e^{-x_1}+1>e^{-x_2}+1>0\Rightarrow0<\dfrac{1}{e^{-x_1}+1}<\dfrac{1}{e^{-x_2}+1}\ (1)$.

Αλλά $x_1<x_2\Rightarrow2x_1<2x_2\overset{e^t\nearrow}{\Rightarrow}0<e^{2x_1}<e^{2x_2}\ (2)$.

Από $(1)\cdot(2)\Rightarrow e^{2x_1}\cdot\dfrac{1}{e^{-x_1}+1}<e^{2x_2}\cdot\dfrac{1}{e^{-x_2}+1}\Rightarrow\dfrac{e^{2x_1}}{e^{-x_1}+1}<\dfrac{e^{2x_2}}{e^{-x_2}+1}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{e^{-x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{\dfrac{1}{e^x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{e^x+1}$

Έστω $y=e^x\Leftrightarrow e^{3x}=y^3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^3}{y+1}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^3}{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}y^2=+\infty$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^3}{y+1}=+\infty.$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}}{e^{-x}+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}}{\dfrac{1}{e^x}+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{3x}}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x}\underset{\substack{\lim\limits_{x\to-\infty}u=\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty}}{\overset{u=3x}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0.$

Δ3. Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x+2)+f(x)\ ,x\in\mathbb{R}$.

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)\ (3)$

Έχουμε $x_1<x_2\Rightarrow x_1+2<x_2+2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x_1+2)<f(x_2+2)\ (4)$

$(3)+(4)\Rightarrow f(x_1)+f(x_1+2)<f(x_2)+f(x_2+2)\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)\Rightarrow h\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(e^{2x}+2\right)+f\left(e^{2x}\right)>f\left(-e^{x}+4\right)+f\left(-e^{x}+2\right)\Leftrightarrow h\left(e^{2x}\right)>h\left(-e^{x}+2\right)\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}$
$e^{2x}>-e^{x}+2\Leftrightarrow e^{2x}+e^{x}-2>0$.(5)
Έστω $y=e^{x}$ (6) τότε $y^{2}+y-2>0\Leftrightarrow y<-2$ ή $y>1$.Οπότε από (6) έχουμε
($e^{x}<-2\Leftrightarrow$ δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ που να την επαληθεύει) ή $\left(e^{x}>1\Leftrightarrow e^{x}>e^{0}\overset{e^{t}\nearrow}{\Leftrightarrow}x>0\right)$.

Κατά συνέπεια $x\in(0,+\infty)$.

Δ4. $A_{fog}=\left\{x\in A_{g}\,/\,g(x)\in A_{f}\right\}=\left\{x>0\,/\ln\left(\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x>0\,/\,\frac{1}{x}>0\right\}=$
$\{x>0\,/\,x>0\}=(0,+\infty)$ και

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{e^{2g(x)}}{e^{-g(x)}+1}=\frac{e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{2}}}{e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}+1}=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{2}}{e^{\ln x}+1}=\frac{\frac{1}{x^{2}}}{x+1}=\frac{1}{x^{3}+x^{2}}.$$

Δ5. Για το ζητούμενο πρέπει και αρκεί η εξίσωση $(fog)(x)=1\Leftrightarrow\frac{1}{x^{3}+x^{2}}=1$ να έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{1}{x^{3}+x^{2}}-1\ \ ,x\in(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to0^{+}}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(\frac{1}{x^{3}+x^{2}}-1\right)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(\frac{1}{x^{2}}\cdot\frac{1}{x+1}\right)-1=(+\infty)\cdot1-1=+\infty$.Άρα υπάρχει α που ανήκει στην γειτονιά του 0^{+} ώστε $\varphi(\alpha)>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{3}+x^{2}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{3}}-1=0-1=-1$. Άρα υπάρχει β που ανήκει στην περιοχή του $+\infty$ ώστε $\varphi(\beta)<0$. Προφανώς ισχύει $\alpha<\beta$.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως ρητή και $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)<0$,οπότε από το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^{3}+x^{2}}=1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,+\infty)$.

Επίσης για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $0<x_1<x_2\Rightarrow0<x_1^{3}<x_2^{3}$ και $0<x_1^{2}<x_2^{2}\Rightarrow$

$0<x_1^{3}+x_1^{2}<x_2^{3}+x_2^{2}\Rightarrow\frac{1}{x_1^{3}+x_1^{2}}>\frac{1}{x_2^{3}+x_2^{2}}\Rightarrow\frac{1}{x_1^{3}+x_1^{2}}-1>\frac{1}{x_2^{3}+x_2^{2}}-1\Rightarrow$

$\varphi(x_1)>\varphi(x_2)\Rightarrow\varphi\searrow$ στο $(0,+\infty)$,οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^{3}+x^{2}}=1$,έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

2ος τρόπος

$(fog)(x)=1\Leftrightarrow\frac{1}{x^{3}+x^{2}}=1\Leftrightarrow x^{3}+x^{2}=1\Leftrightarrow x^{3}+x^{2}-1=0$.

Έστω $\varphi(x)=x^{3}+x^{2}-1,\ \ x\geq0$.

Είναι $\varphi(0)=-1,\ \varphi(1)=1$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)\subseteq(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $0<x_1<x_2\Leftrightarrow0<x_1^{3}<x_2^{3}$ και $0<x_1^{2}<x_2^{2}\Rightarrow$
$x_1^{3}+x_1^{2}<x_2^{3}+x_2^{2}\Leftrightarrow x_1^{3}+x_1^{2}-1<x_2^{3}+x_2^{2}-1\Leftrightarrow\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα η προηγούμενη της ρίζα είναι μοναδική στο $(0,+\infty)$.